

Eesti LXIX matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
13. jaanuaril 2022.a. Tallinnas
XII klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik täisarvulised n väärtused, mille korral kehtib võrdus $(n^2 + 2n - 4)^{n+5} = 1$.
2. a) Leia summa $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}$ teades, et järjestikuste liikmete vahed moodustavad jada $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$, kusjuures $a_0 = 0$.
b) On antud arvude jada: $b_0; b_1; b_2; \dots; b_{2022}$. On teada, et järjestikuste liikmete vahed moodustavad naturaalarvude jada $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, kusjuures $b_0 = 0$. Leia arv b_{2022} .
3. Lahenda võrratus: $\log_{x+3}(x^2 - 6) \geq 2$.
4. Tahvlile on kirjutatud arvud $1, 2, 3, \dots, 2022$. Juku mängib mõttemängu, kus igal käigul tohib ta kustutada kaks tahvlil olevat arvu ning kirjutada nende asemel arvu, mis on kahe kustutatud arvu aritmeetiline keskmine. Näiteks kui kustutada tahvlilt arvud 1 ja 2, siis nende asemele tuleb kirjutada 1,5, või kui tahvlilt kustutada arvud 1 ja 3, siis nende asemele tuleks kirjutada 2. Selliseid käike tehakse kuniks tahvlile jääb alles vaid üks arv.
Kas leidub selline käikude jada, mille elluviimisel jääb tahvlile viimaseks arvuks
 - a) 2?
 - b) 999?
5. Koonusekujulises anum asetatud kogus vett. Kui anum asetada selliselt, et selle põhi on allapoole, siis ülemise vedelikupiiri kaugus koonuse tipust on 8 cm. Kui anum asetada selliselt, et selle põhi on ülespoole, siis ülemise vedelikupiiri kaugus koonuse põhjast on 2 cm. Leia selle koonuse kõrgus.

